文章编号:1005-3085(2010)01-0118-07

# 具有正负系数的二阶非线性中立型方程的非振动准则*

杨甲山

(邵阳学院理学与信息科学系，湖南 邵阳 422004)

**摘 要**: 中立型泛函微分方程的振动性在理论和应用中有着重要意义。本文研究了一类具有正负系数的二阶非线性中立型时滞泛函微分方程的振动性，利用Banach空间的压缩映象原理和一些分析技巧，建立了该方程非振动的一些新的准则，并给出了定理应用的例子。所得结论推广和改进了现有文献中的一系列结果。

**关键词**: 正负系数；中立型泛函微分方程；非线性；振动；非振动

**分类号**: AMS(2000) 34K11 **中图分类号**: O175.7 **文献标识码**: A

## 1 引言

关于中立型时滞泛函微分方程的振动性和渐近性的研究，除了在理论上具有非常重要的意义外，在实际应用中也有着非常重要的意义。因此，在这一领域出现了许多研究成果[1-4]。众所周知，方程的振动性与方程正解的存在条件密切相关，因而一些学者对某些方程是否存在最终正解的条件作了研究[5-9]。近年来，在计算机科学研究中出现了一些同时具有正负系数的中立型方程的模型，使得这类方程的研究日益受到重视。但我们注意到具有正负系数的高阶中立型方程的非振动定理尚不多见。本文将讨论一类形式更为广泛的具有正负系数的中立型泛函微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[x(t)+P(t)x(t-\tau)] + \sum_{i=1}^{m} Q_i(t)f_i(x(t-\sigma_i)) - \sum_{j=1}^{l} R_j(t)g_j(x(t-\delta_j)) = 0, \quad t \geq t_0 > 0. \tag{1}$$

这里$\tau > 0$, $\sigma_i \geq 0$, $\delta_j \geq 0$ ($i = 1,2,\cdots,m$; $j = 1,2,\cdots,l$ (下同))为常数；$m, l$为给定的正整数；$P, Q_i, R_j \in C([t_0,+\infty),\mathbf{R})$，且$P(t) \neq 0$; $f_i, g_j \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，且$xf_i(x) > 0$, $xg_j(x) > 0 (x \neq 0)$。

函数$x(t)$称为方程(1)的解，如果

$$x(t) \in C\big([t_{-1},+\infty),\mathbf{R}\big), \quad x(t)+P(t)x(t-\tau) \in C^2\big([t_0,+\infty),\mathbf{R}\big),$$

并且$x(t)$满足方程(1)，这里

$$t_{-1} = \min\Big\{(t_0-\tau),\ \min_{1\leq i\leq m}\{t_0-\sigma_i\},\ \min_{1\leq j\leq l}\{t_0-\delta_j\}\Big\}.$$

**收稿日期**: 2008-05-26. **作者简介**: 杨甲山(1963年8月生)，男，学士，副教授. 研究方向：微分差分方程.
***基金项目**: 湖南省教育厅资助科研项目(07C680).

方程 (1) 在半直线 $[T_x,+\infty)(T_x \ge t_0)$ 上的解 $x(t)$ 称为是正则的，如果它满足 $\sup\{|x(t)| : t \ge T\} > 0$，对任意的 $T \ge T_x$。方程 (1) 的正则解称为是振动的，如果它有任意大的零点；否则，此正则解称为是非振动的。本文的目的是要建立方程 (1) 非振动的若干新的准则，所得定理改进了现有文献中的一些结论。为此，考虑如下假设。

$(H_1)$ $f_i, g_j$ 均满足局部 Lipchitz 条件，其 Lipchitz 常数分别记为 $L_{f_i}(B)$, $L_{g_j}(B)$，$B$ 为所考虑的区域；

$(H_2)$ $Q_i(t) \ge 0$, $R_j(t) \ge 0$，且

$$\int_{t_0}^{+\infty}(t-t_0)\sum_{i=1}^{m}Q_i(t)\mathrm{d}t < +\infty, \quad \int_{t_0}^{+\infty}(t-t_0)\sum_{j=1}^{l}R_j(t)\mathrm{d}t < +\infty;$$

$(H_3)$ 对任意固定常数 $\alpha_i > 0$，最终有

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i Q_i(t) - \sum_{j=1}^{l}R_j(t) \ge 0.$$

## 2　方程的非振动准则

下面将建立方程 (1) 的几个新的非振动准则。为此引入记号

$$\overline{p} = \limsup_{t\to+\infty} P(t), \quad \underline{p} = \liminf_{t\to+\infty} P(t),$$

$$L_k = \max\left\{\max_{1\le i\le m}\{L_{f_i}(\mathbf{B}_k)\}, \ \max_{1\le j\le l}\{L_{g_j}(\mathbf{B}_k)\}\right\}, \quad k = 1,2,3,4,5.$$

**定理1**　设方程 (1) 满足 $(H_1)$-$(H_3)$，且 $0 < \overline{p} < 1$，并最终有 $P(t) \ge 0$，则方程 (1) 是非振动的。

**证明**　考虑 Banach 空间 $\mathbf{B} = \{x \mid x \in C([t_0,+\infty),\mathbf{R})$ 且有界$\}$，$\mathbf{B}$ 上的范数定义为

$$\|x\| = \sup_{t\ge t_0}|x|.$$

令 $\mathbf{B}_1 = \{x \in \mathbf{B} : a_1 \le x(t) \le A_1, t \ge t_0\}$，则 $\mathbf{B}_1$ 是 $\mathbf{B}$ 的有界凸闭子集。这里常数 $A_1 > a_1 > 0$，并满足不等式

$$1-\overline{p} < A_1 \le \frac{4}{3\overline{p}+1}[(1-\overline{p})-a_1]. \tag{2}$$

记 (下面定理2至定理5也有类似的记号，将从略)

$$\overline{\alpha}_i = \max_{x\in\mathbf{B}_1}\{f_i(x)\}, \quad \underline{\alpha}_i = \min_{x\in\mathbf{B}_1}\{f_i(x)\}, \quad \overline{\beta}_j = \max_{x\in\mathbf{B}_1}\{g_j(x)\}, \quad \underline{\beta}_j = \min_{x\in\mathbf{B}_1}\{g_j(x)\}.$$

则由定理条件及 (2) 知，存在 $t_1 \ge t_0$，使得当 $t \ge t_1$ 时，有

$$0 \le P(t) \le \frac{1+3\overline{p}}{4}, \tag{3}$$

$$\int_{t_1}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}Q_i(s)+\sum_{j=1}^{l}R_j(s)\Big]\mathrm{d}s < \frac{3(1-\overline{p})}{4L_1}, \tag{4}$$

$$0 \le \int_{t_1}^{+\infty} (s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m} \overline{\alpha}_i Q_i(s) - \sum_{j=1}^{l} \underline{\beta}_j R_j(s)\Big]\mathrm{d}s \le A_1 + \overline{p} - 1, \tag{5}$$

$$\int_{t_1}^{+\infty} (s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m} \underline{\alpha}_i Q_i(s) - \sum_{j=1}^{l} \overline{\beta}_j R_j(s)\Big]\mathrm{d}s \ge 0. \tag{6}$$

若定义算子 $T_1 : \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}$ 如下

$$(T_1x)(t) = \begin{cases} 1-\overline{p}-P(t)x(t-\tau)+(t-t_0)\int_t^{+\infty}\big[\sum\limits_{i=1}^{m} Q_i(s)f_i(x(s-\sigma_i)) \\ \quad -\sum\limits_{j=1}^{l} R_j(s)g_j(x(s-\delta_j))\big]\mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t}(s-t_0)\big[\sum\limits_{i=1}^{m} Q_i(s)f_i(x(s-\sigma_i)) \\ \quad -\sum\limits_{j=1}^{l} R_j(s)g_j(x(s-\delta_j))\big]\mathrm{d}s, \quad t \ge t_1, \\ (T_1x)(t_1), \quad t_0 \le t \le t_1. \end{cases}$$

则显然 $T_1x$ 是连续的。注意定理的条件和 (5)，我们有

$$(T_1x)(t) \le 1-\overline{p}+\int_{t_1}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha}_i Q_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\underline{\beta}_j R_j(s)\Big]\mathrm{d}s \le A_1, \quad t \ge t_1.$$

另外，由 (3), (6) 及 (2)，可得

$$(T_1x)(t) \ge (1-\overline{p}) - \frac{1+3\overline{p}}{4}A_1 \ge a_1,$$

从而 $a_1 \le T_1x \le A_1$，因此 $T_1\mathbf{B}_1 \subseteq \mathbf{B}_1$。又对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{B}_1$ 和 $t \ge t_1$，由 (3), (4) 得

$$\begin{aligned} &|(T_1x_1)(t)-(T_1x_2)(t)| \\ \le\ & \frac{1+3\overline{p}}{4}\|x_1-x_2\| + L_1\|x_1-x_2\|\int_{t_1}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}Q_i(s)+\sum_{j=1}^{l}R_j(s)\Big]\mathrm{d}s \\ =\ & q_0\|x_1-x_2\|. \end{aligned}$$

其中

$$q_0 = \frac{1+3\overline{p}}{4} + L_1\int_{t_1}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}Q_i(s)+\sum_{j=1}^{l}R_j(s)\Big]\mathrm{d}s < 1.$$

因此 $T_1$ 是 $\mathbf{B}_1$ 上的压缩映射。由 Banach 压缩映射原理知，$T_1$ 在 $\mathbf{B}_1$ 上有唯一的不动点 $x^* = x^*(t)$，显然 $x^*(t)$ 是方程 (1) 的有界的正解。定理证毕。

**定理 2** 设方程 (1) 满足 $(H_1)$-$(H_3)$，且 $-1 < \underline{p} < 0$，并最终有 $P(t) \le 0$，则方程 (1) 是非振动的。

**证明** 证明完全类似于定理 1。此时只要令 $\mathbf{B}_2 = \{x \in \mathbf{B} : a_2 \le x(t) \le A_2,\ t \ge t_0\}$，其中常数 $A_2 > a_2 > 0$，且满足不等式 $0 < a_2 < 1 + \underline{p}$ 和 $A_2 > \frac{4}{3}$。由定理条件知，存在 $t_2 \ge t_0$，使得当 $t \ge t_2$ 时，有

$$-1 < \frac{3\underline{p}-1}{4} \le P(t) \le 0,$$

而且

$$\int_{t_2}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}Q_i(s)+\sum_{j=1}^{l}R_j(s)\Big]\mathrm{d}s<\frac{3(1+\underline{p})}{4L_2},$$

$$0\le\int_{t_2}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha}_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\underline{\beta}_jR_j(s)\Big]\mathrm{d}s\le(1+\underline{p})\Big(\frac{3}{4}A_2-1\Big),$$

$$\int_{t_2}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}\underline{\alpha}_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\overline{\beta}_jR_j(s)\Big]\mathrm{d}s\ge 0.$$

相应地定义算子 $T_2:\mathbf{B}_2\to\mathbf{B}$ 如下

$$(T_2x)(t)=\begin{cases}1+\underline{p}-P(t)x(t-\tau)+(t-t_0)\int_t^{+\infty}\Big[\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(s)f_i(x(s-\sigma_i))\\ \quad-\sum\limits_{j=1}^{l}R_j(s)g_j(x(s-\delta_j))\Big]\mathrm{d}s+\int_{t_2}^{t}(s-t_0)\Big[\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(s)f_i(x(s-\sigma_i))\\ \quad-\sum\limits_{j=1}^{l}R_j(s)g_j(x(s-\delta_j))\Big]\mathrm{d}s,\quad t\ge t_2,\\ (T_2x)(t_2),\quad t_0\le t\le t_2.\end{cases}$$

定理证毕。

**定理3** 设方程(1)满足$(H_1)$-$(H_3)$，且存在常数$P_0$，使得最终有$|P(t)|\le P_0<\frac{1}{2}$，则方程(1)是非振动的。

**证明** 类似于定理1。只要令$\mathbf{B}_3=\{x\in\mathbf{B}:a_3\le x(t)\le A_3,\ t\ge t_0\}$，其中常数$A_3>a_3>0$，且满足不等式

$$\frac{1}{1-P_0}<A_3\le\frac{1-a_3}{P_0}<\frac{1}{P_0}.$$

由定理条件知，存在$t_3\ge t_0$，使得当$t\ge t_3$时，有

$$\int_{t_3}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}Q_i(s)+\sum_{j=1}^{l}R_j(s)\Big]\mathrm{d}s<\frac{1-P_0}{L_3},$$

$$0\le\int_{t_3}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha}_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\underline{\beta}_jR_j(s)\Big]\mathrm{d}s\le(1-P_0)A_3-1,$$

$$\int_{t_3}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}\underline{\alpha}_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\overline{\beta}_jR_j(s)\Big]\mathrm{d}s\ge 0.$$

相应地定义算子 $T_3:\mathbf{B}_3\to\mathbf{B}$ 如下

$$(T_3x)(t)=\begin{cases}1-P(t)x(t-\tau)+(t-t_0)\int_t^{+\infty}\Big[\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(s)f_i(x(s-\sigma_i))\\ \quad-\sum\limits_{j=1}^{l}R_j(s)g_j(x(s-\delta_j))\Big]\mathrm{d}s+\int_{t_3}^{t}(s-t_0)\Big[\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(s)f_i(x(s-\sigma_i))\\ \quad-\sum\limits_{j=1}^{l}R_j(s)g_j(x(s-\delta_j))\Big]\mathrm{d}s,\quad t\ge t_3,\\ (T_3x)(t_3),\quad t_0\le t\le t_3.\end{cases}$$

定理证毕。

**定理 4** 设方程 (1) 满足条件 $(H_1)$-$(H_3)$，且 $-\infty<\underline{p}\le\overline{p}<-1$，则方程 (1) 是非振动的。

**证明** 证明完全类似于定理 1。此时只要令 $\mathbf{B}_4=\{x\in\mathbf{B}:a_4\le x(t)\le A_4,\ t\ge t_0\}$，其中常数 $A_4>a_4>0$，且满足不等式

$$a_4<\frac{-1}{1+\underline{p}-\delta}<\frac{-1}{1+\overline{p}+\delta}<A_4,$$

这里

$$0<\delta<-\frac{1+\underline{p}}{2}.$$

由定理条件知，存在 $t_4\ge t_0$，使得当 $t\ge t_4$ 时，有 $\underline{p}-\delta<P(t)<\overline{p}+\delta<-1$，而且

$$\int_{t_4}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}Q_i(s)+\sum_{j=1}^{l}R_j(s)\Big]\mathrm{d}s<-\frac{\overline{p}+\delta+1}{L_4},$$

$$0\le\int_{t_4}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha}_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\underline{\beta}_jR_j(s)\Big]\mathrm{d}s\le\frac{\overline{p}+\delta}{\underline{p}-\delta}\big[1+(1+\underline{p}-\delta)a_4\big],$$

$$\int_{t_4}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}\underline{\alpha}_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\overline{\beta}_jR_j(s)\Big]\mathrm{d}s\ge 0.$$

相应地定义算子 $T_4:\mathbf{B}_4\to\mathbf{B}$ 如下

$$(T_4x)(t)=\begin{cases}\frac{-1}{P(t+\tau)}-\frac{x(t+\tau)}{P(t+\tau)}+\frac{t+\tau-t_0}{P(t+\tau)}\int_{t+\tau}^{+\infty}\Big[\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(s)f_i(x(s-\sigma_i))\\ \quad-\sum\limits_{j=1}^{l}R_j(s)g_j(x(s-\delta_j))\Big]\mathrm{d}s+\frac{1}{P(t+\tau)}\int_{t_4}^{t+\tau}(s-t_0)\Big[\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(s)f_i(x(s-\sigma_i))\\ \quad-\sum\limits_{j=1}^{l}R_j(s)g_j(x(s-\delta_j))\Big]\mathrm{d}s,\quad t\ge t_4,\\ (T_4x)(t_4),\quad t_0\le t\le t_4.\end{cases}$$

这里

$$t+\tau\ge t_0+\max\Big\{\max_{1\le i\le m}\{\sigma_i\},\ \max_{1\le j\le l}\{\delta_j\}\Big\}.$$

定理证毕。

**定理 5** 设方程 (1) 满足条件 $(H_1)$-$(H_3)$，且 $1<\underline{p}\le\overline{p}<+\infty$，则方程 (1) 是非振动的。

**证明** 证明完全类似于定理 1。此时只要令 $\mathbf{B}_5=\{x\in\mathbf{B}:a_5\le x(t)\le A_5,\ t\ge t_0\}$，其中常数 $A_5>a_5>0$，且满足不等式

$$0<a_5\le\frac{1}{\overline{p}+\varepsilon}-\frac{1}{\underline{p}-\varepsilon}A_5\quad 和\quad \frac{1}{\underline{p}-\varepsilon}<A_5<\frac{\underline{p}+\varepsilon}{\overline{p}-\varepsilon}<1.$$

这里

$$0<\varepsilon<\frac{\underline{p}-1}{2}.$$

由定理条件知，存在$t_5 \ge t_0$，使得当$t \ge t_5$时，有$\underline{p}-\varepsilon \le P(t) \le \overline{p}+\varepsilon$，而且

$$\int_{t_5}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}Q_i(s)+\sum_{j=1}^{l}R_j(s)\Big]\mathrm{d}s < \frac{(\underline{p}-\varepsilon)-1}{L_5},$$

$$0 \le \int_{t_5}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}\overline{\alpha}_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\underline{\beta}_jR_j(s)\Big]\mathrm{d}s \le (\underline{p}-\varepsilon)A_5-1,$$

$$\int_{t_5}^{+\infty}(s-t_0)\Big[\sum_{i=1}^{m}\underline{\alpha}_iQ_i(s)-\sum_{j=1}^{l}\overline{\beta}_jR_j(s)\Big]\mathrm{d}s \ge 0.$$

相应地定义算子$T_5:\mathbf{B}_5\to\mathbf{B}$如下

$$(T_5x)(t)=\begin{cases}\frac{1}{P(t+\tau)}-\frac{x(t+\tau)}{P(t+\tau)}+\frac{t+\tau-t_0}{P(t+\tau)}\int_{t+\tau}^{+\infty}\Big[\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(s)f_i(x(s-\sigma_i))\\ \quad-\sum\limits_{j=1}^{l}R_j(s)g_j(x(s-\delta_j))\Big]\mathrm{d}s+\frac{1}{P(t+\tau)}\int_{t_5}^{t+\tau}(s-t_0)\Big[\sum\limits_{i=1}^{m}Q_i(s)f_i(x(s-\sigma_i))\\ \quad-\sum\limits_{j=1}^{l}R_j(s)g_j(x(s-\delta_j))\Big]\mathrm{d}s,\quad t\ge t_5,\\ (T_5x)(t_5),\quad t_0\le t\le t_5.\end{cases}$$

这里

$$t+\tau \ge t_0+\max\Big\{\max_{1\le i\le m}\{\sigma_i\},\ \max_{1\le j\le l}\{\delta_j\}\Big\}.$$

定理证毕。

**注**　文献 [5] 中的主要定理是本文定理 1 至定理 5 当$R_j(t)\equiv 0$，$m=1$，$f(x)=x$时的特殊情况，本文定理将其推广到了具有正负系数的非线性的情形。

**例**　考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\big[x(t)+P(t)x(t-\tau)\big]+\Big(\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^4}\Big)[x(t-\sigma)]^{\frac{3}{5}}-\frac{2}{t^4}[x(t-\delta)]^3=0.$$

其中$P(t)$满足定理 1 至定理 5 中的相应条件，此时

$$Q(t)=\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^4}>0,\quad R(t)=\frac{2}{t^4}>0.$$

显然

$$\int_{1}^{+\infty}(t-1)Q(t)\mathrm{d}t<+\infty,\quad \int_{1}^{+\infty}(t-1)R(t)\mathrm{d}t<+\infty,$$

且$aQ(t)-R(t)\ge 0$对一切$a>0$，$t\ge\frac{2-a}{a}$成立。因此上述方程是非振动的。但文献 [5] 和文献 [6] 等中的定理对此方程均无效。

此例说明，本文定理推广并改进了现有文献的结果，因此本文定理更具有普遍性。

## 参考文献：


[1] Erbe L H, Kong Q K, Zang B G. Oscillation Theory for Functional Differential Equations [M]. New York: Marcel Dekker, 1995

[2] Gai M J, Shi B, Zhang D C. Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations of neutral type[J]. Appl Math J Chin Univ (Ser B), 2001, 16(2): 122-126

[3] 仉志余，周勇，俞元洪. 非线性二阶泛函微分方程的振动准则[J]. 系统科学与数学，2001, 20(1): 1-10
Zhang Z Y, Zhou Y, Yu Y H. Oscillation criteria for nonlinear functional differential equations of second order[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2001, 20(1): 1-10

[4] 林文贤. 高阶中立型方程的强迫振动[J]. 纯粹数学与应用数学，2002, 18(3): 263-266
Lin W X. Forced oscillation of high order neutral equations[J]. Pure and Applied Mathematics, 2002, 18(3): 263-266

[5] Kulenovic M R S, Hadziomersoahic S. Existence of nonoscillatory solution of second order linear neutral delay defferential equations[J]. J Math Anal Appl, 1998, 228: 436-448

[6] Kong Q. Interval criteria for oscillation of cecond order linear ordinary differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1999, 229(2): 258-270

[7] Liu Y H, Chen Y B. Existence of nonoscillatory solution of second order linear neutral delay difference equation[J]. Journal of Hunan Agricultural University (Natural Sciences), 2001, 27(1): 76-78

[8] 张玫玉. 一类泛函微分方程边值问题的多重正解[J]. 工程数学学报，2007, 24(4): 735-740
Zhang M Y. Multiple positive solutions of boundary value problems for a class of functional differential equations[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(4): 735-740

[9] 刘锡平，贾梅. 一类时滞泛函微分方程组边值问题的多个非负解存在性[J]. 工程数学学报，2008, 25(4): 685-691
Liu X P, Jia M. Multiple nonnegative solutions to boundary value problems with systems of delay functional differential equations[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(4): 685-691


# Nonoscillation Criteria for Second Order Nonlinear Neutral Equations with Positive and Negative Coefficients


YANG Jia-shan

(Department of Science and Information, Shaoyang University, Shaoyang Hunan 422004)



**Abstract:** The oscillation of neutral functional differential equations has important implications in both theory and application. We study the oscillation of a class of second order nonlinear neutral delay functional differential equations with positive and negative coefficients. Using the Banach contraction mapping principle and some analytic techniques, some new nonoscillation criteria for the equation are established, and illustrative examples are given. Existing results in the literature are improved and extended.



**Keywords:** positive and negative coefficient; neutral functional differential equation; nonlinear; oscillation; nonoscillation



**Received:** 26 May 2008. **Accepted:** 01 Apr 2009.

**Foundation item:** The Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department (07C680).